

Proračun geometrijske osjetljivosti turbo-profila  
korištenjem numeričke mehanike fluida i jednadžbi  
kontinuiranog adjointa

Nikola Lisjak

16. rujna 2013.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se profesoru Jasku na izuzetnoj motivaciji i podršci koju mi je pružio tijekom izrade završnog rada.

Nikola Lisjak

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>5</b>
1.1	Turbostrojevi i računalne simulacije . . . . .	5
1.2	Optimizacija . . . . .	5
1.3	Optimizacija korištenjem gradijenta . . . . .	6
1.3.1	Konačne razlike . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Matematičke osnove</b>	<b>7</b>
2.1	Problem traženja optimuma s ograničenjima . . . . .	7
2.1.1	Lagrangeovi multiplikatori . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Opis geometrije</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Značajke strujanja u kanalu rešetke</b>	<b>12</b>
4.1	Jednadžbe toka fluida . . . . .	12
4.2	Turbulencija . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Modeliranje turbulencije</b>	<b>13</b>
5.1	Vremenski osrednjene jednadžbe toka fluida (RANS) . . . . .	13
5.1.1	RANS modeli turbulencije . . . . .	15
5.2	Funkcije zida . . . . .	15
5.3	O rubnim uvjetima . . . . .	16
<b>6</b>	<b><math>k - \varepsilon</math> model</b>	<b>17</b>
6.1	Modeliranje konstanti . . . . .	17
6.2	Rubni uvjeti za $k - \varepsilon$ model . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Adjungirane jednadžbe modela turbulencije</b>	<b>19</b>
7.1	Rubni uvjeti za adjungirane varijable . . . . .	20
7.2	Adjungirane funkcije zida . . . . .	21
7.3	Adjungirani $k - \varepsilon$ i "frozen turbulence" . . . . .	21
<b>8</b>	<b>Prikaz rezultata</b>	<b>22</b>
8.1	Geometrija 1 . . . . .	22
8.2	Geometrija 2 . . . . .	29
<b>9</b>	<b>Zaključak</b>	<b>36</b>

## Popis slika

1	Geometrija 1 . . . . .	10
2	Geometrija 2 . . . . .	10
3	Mreža lopatice konstruirane isključivo pomoću kružnih lukova sa 26449 konačna volumena. . . . .	11
4	Mreža lopatice s kružnim lukovima i pravcima sa 11147 konačna volumena. . .	11
5	Brzina. . . . .	23
6	Adjungirana brzina. . . . .	23
7	Tlak . . . . .	24
8	Adjungirani tlak. . . . .	24
9	Turbulentna viskoznost. . . . .	25
11	Kinetička energija turbulencije. . . . .	26
12	Adjungirana kinetička energija turbulencije. . . . .	26
13	Rasipanje kinetičke energije turbulencije. . . . .	27
14	Adjungirano rasipanje kinetičke energije turbulencije. . . . .	27
15	Raspodjela osjetljivosti. . . . .	28
16	Brzina. . . . .	30
17	Adjungirana brzina. . . . .	30
18	Tlak . . . . .	31
19	Adjungirani tlak. . . . .	31
20	Turbulentna viskoznost. . . . .	32
22	Kinetička energija turbulencije. . . . .	33
24	Rasipanje kinetičke energije turbulencije. . . . .	34
26	Raspodjela osjetljivosti . . . . .	35

## Popis tablica

1	Zakon zida. . . . .	16
---	---------------------	----



### Sažetak

U radu je provedena simulacija strujanja kroz turbinsku rešetku pomoću dvodimenzionalnog modela presjeka lopatica primjenom algoritma SIMPLE uz izračun osjetljivosti ukupnog pada zaustavnog tlaka na promjenu oblika lopatice. Za izračun osjetljivosti obzirom na oblik lopatice korišten je sustav adjungiranih Navier-Stokesovih jednadžbi u  $k - \varepsilon$  modelu turbulencije.

Analizirane su dvije geometrije od kojih bi jedna trebala pokazati kako izgleda osjetljivost za dobro konstruirani a druga za loše konstruirani profil. Kvalitetniji je profil konstruiran isključivo pomoću kružnih lukova, dok na manje kvalitetnom profilu osim kružnih lukova, izlazni dio lopatice definiran pravcima. Simulacija je provedena u programskom paketu OpenFOAM®.

Napravljena je također usporedba odražaja dvaju adjungiranih modela turbulencije: adjungirani  $k - \varepsilon$  i "frozen turbulence".

# 1 Uvod

## 1.1 Turbostrojevi i računalne simulacije

Aerodinamika turbostrojeva je područje u kojem se vjerojatno najviše koristi računalna simulacija fluida. Povećanjem pouzdanosti računalnih simulacija, konstruiranje turbostrojeva bez te discipline u današnje vrijeme sve se teže može zamisliti.

Računalne simulacije na neki se način nadopunjuju s eksperimentalnim istraživanjima. A veza je sljedeća. Ispravnost rezultata računalnih simulacijama može se potvrditi ili odbaciti eksperimentalnom provjerom dok nam računalne simulacije omogućuju puno bolji uvid u ponašanje fluida. Osim toga omogućuju nam značajne uštede novaca i vremena.

Uz napredak računalnih simulacija, naglasak se premješta automatizaciju procesa konstruiranja. To znači da bi sljedeći korak bio automatizirana optimizacija proizvoda. To bi pojednostavilo analizu i uštedjelo vrijeme i novac te ubrzalo pronalaženje najboljeg rješenja.

## 1.2 Optimizacija

Potreba za optimizacijom se javlja zbog sve bržeg razvoja tehnologije te neprestanog poboljšavanja proizvoda, potrebe da se ostvari što bolja konkurentnost na tržištu uz što manje rada i gubitka vremena. Metodama optimizacije postiže se učinkovitiji, brži pronalazak boljeg rješenja.

Optimizacija podrazumijeva smanjenje gubitaka odnosno povećanje učinkovitosti.

Matematička optimizacija često se naziva još i nelinearno programiranje, matematičko programiranje ili numerička optimizacija. Općenito se matematička optimizacija može opisati kao znanost određivanja najboljih rješenja za matematički definirane probleme. Optimizacija se koristi u inženjerstvu i znanosti, kako bi se smanjilo gubitke, potrošnju energije, materijala te povećalo iskoristivost i učinkovitost. Također se koristi za poboljšanje ekonomičnosti, da se osigura maksimalna dobit uz minimalni utrošak.

Početak matematičke optimizacije seže u 1940., kad se razvila metoda simplex, bitna za rješavanje posebnih vrsta problema linearnog programiranja. Od tad pa nadalje su se razvijale, ispitale i uspješno primijenile razne metode za rješavanje općeg problema optimizacije u znanstvene i ekonomske svrhe. Naravno da je napredak računalne tehnologije bio veoma bitan za razvoj matematičkih metoda optimizacije.

Postoje razni pristupi optimizaciji, koji se dijele na gradijentne i bezgradijente. Gradijentne metode, kao što samo ime govori, se temelje procjeni najboljeg rješenja pomoću gradijenta, dok se kod bezgradijentnih metoda najbolje rješenje nalazi preko načina probiranja iz skupa podataka.

U bezgradijentne metode se između ostalog ubrajaju razne evolucijske metode poput genetskog algoritma, "simulated annealing", "particle swarm optimization", a tipični predstavnici gradijentnih metoda su primjerice Newton-Rhapsonova metoda, relaksacijski algoritmi, BFGS, metoda pouzdanih područja.

Važno je naglasiti neka od svojstava gradijentnih i bezgradijentnih metoda. Dok su bezgradijentne metode možda temeljitije i obuhvaćaju mnoštvo različitih rješenja, bezgradijentne su puno brže i učinkovitije u pronalaženju najbližeg optimuma te su zato u porastu u inženjerskoj praksi. Nedostatak je što se gradijentne metode usredotočavaju na traženje lokalnog optimuma, ne uzimajući u obzir druga, možda bolja rješenja.

### 1.3 Optimizacija korištenjem gradijenta

Gradijentne metode, kao što je to u ovom slučaju, imaju primjenu i u optimizaciji oblika. S tog gledišta dijelimo dva pristupa optimizaciji oblika: topološka optimizacija i optimizacija zadanog oblika. Razlika između njih je u tome što se topološka optimizacija primjenjuje za slučajeve u kojima je većina zahtjeva nepoznato, primjerice ako želimo optimirati protok zraka u kabini na način da se postigne što ravnomjernije nastrujavanje zraka na okolinu. Optimizacija oblika primjenjuje se kad već imamo približni oblik, u svrhu nalaženja boljeg rješenja, odnosno u svrhu poboljšanja već postojećeg oblika ili za naknadnu optimizaciju nakon topološke.

#### 1.3.1 Konačne razlike

Konačne razlike su temelj gradijentnih metoda kao način izračunavanja gradijenata. Konačna razlika je matematički izraz oblika  $f(x + b) - f(x + a)$ . Kada konačnu razliku podijelimo sa  $b - a$  dobije se kvocijent razlika. Aproksimacija derivacija sa konačnim razlikama ima središnju ulogu u metodi konačnih razlika za numeričko rješenje diferencijalnih jednadžbi, posebice za probleme rubnih uvjeta.

Najčešće se koriste tri oblici konačnih razlika:

**forward difference**  $\Delta_h[f](x) = f(x + h) - f(x)$

**backward difference**  $\nabla_h[f](x) = f(x) - f(x - h)$

**central difference**  $\delta_h[f](x) = f(x + \frac{1}{2}h) - f(x - \frac{1}{2}h)$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta_h[f](x)}{h} \quad (1)$$

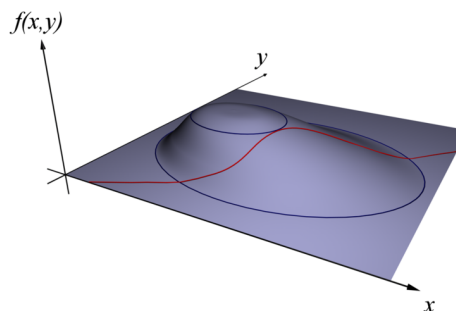
## 2 Matematičke osnove

### 2.1 Problem traženja optimuma s ograničenjima

Najbolje rješenje se često mora tražiti unutar nekih granica. Kao primjer takvog rješenja možemo uzeti traženje najviše točke na stazi koja ide preko brda.

Zamislimo da oko brda ide staza, i treba pronaći najvišu točku pod uvjetom da se nalazi na toj stazi. Ta staza u općem slučaju ne mora prolaziti samim vrhom brda.

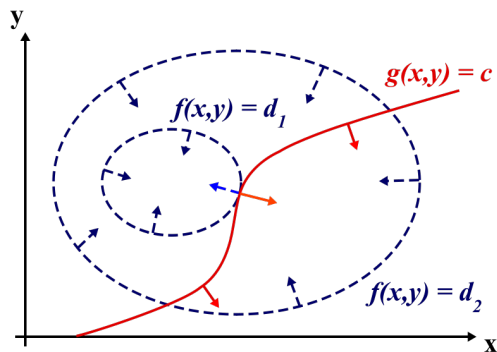
U slučaju da tražimo vrh brda, problem bi bio jednostavan, obična derivacija. Isto tako da imamo zadane koordinate staze i tražimo najvišu točku također bi bila obična derivacija, što se čini jednostavno, a zapravo je komplicirano jer je potrebno provesti prevođenje funkcije u eksplicitan oblik, no to je sasvim nepotrebno, pošto nam poznavanje eksplicitnog oblika nije u interesu, zato pribjegavamo izražavanju problema u obliku funkcionala, gdje funkcional predstavlja upravo tu stazu oko brda.



### 2.1.1 Lagrangeovi multiplikatori

U matematičkoj optimizaciji, metoda Lagrangeovih množitelja (po Josephu Louisu Lagrangeu) je strategija nalaženja lokalnog optimuma funkcije koja je ograničena jednadžbama.

Lagrangeovi multiplikatori rade na sljedeći način:



Na funkciju  $f(x, y)$  i propisujemo ograničenje  $g(x, y) = c$ . Ono što znamo je da bi na mjestu gdje se nalazi optimum, odnosno najviša točka brda izolirane funkcije i ograničenja trebale biti paralelne. A kako su one paralelne i njihova okomica, odnosno gradijent također pokazuje u istom smjeru. Jedina je razlika u tome što gradijent funkcije ne mora biti jednak gradijentu ograničenja već se razlikuju za neki faktor  $\lambda$ .

Dakle:

$$\nabla_{x,y} f = -\lambda \nabla_{x,y} g$$

a  $\nabla_{x,y} g = 0$

gdje je  $\nabla_{x,y} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$

iz toga proizlazi:

$$\Lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot (g(x, y) - c)$$

Na kraju riješimo sustav jednadžbi:

$$\nabla_{x,y,\lambda} \Lambda(x, y, \lambda) = 0$$

Kad se radi o problemu sa više ograničenja odjednom, može se zamisliti da se gradijent funkcije sastavlja pomoću gradijenata ograničenja isto kao što se jedan vektor može prikazati kombinacijom drugih:

$$\Lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) + \sum_i^n \lambda_i \cdot (g_i(x, y) - c)$$

To je metoda koja se koristi u izvođenju adjungiranih jednadžbi toka fluida i modela turbulencije.

### 3 Opis geometrije

Analiza je bila provedena za dvije geometrije. Jedna je definirana isključivo pomoću kružnih lukova, druga je osim kružnih lukova definirana pravcima. Uzeta je pretpostavka, da bi skok u drugoj derivaciji usljed prijelaza s kružnog luka na pravac mogao uzrokovati gubitke, gdje bi se jasno moglo vidjeti kako funkcioniraju adjungirane Navier-Stokesove jednačbe.

U radu je bila provedena simulacija protoka u dvodimenzionalnom modelu rešetke rotora turbine čiji profili su definirane pomoću kružnih lukova, te statorsche rešetke čiji profili su definirani kružnim lukovima i pravcem po leđnoj površini profila.

Profil rotorsche lopatice

Profil (11-1125)

kut ugradnje:  $66^\circ$

promjer na korijenu: 428.50 mm

promjer na vrhu: 441.00 mm

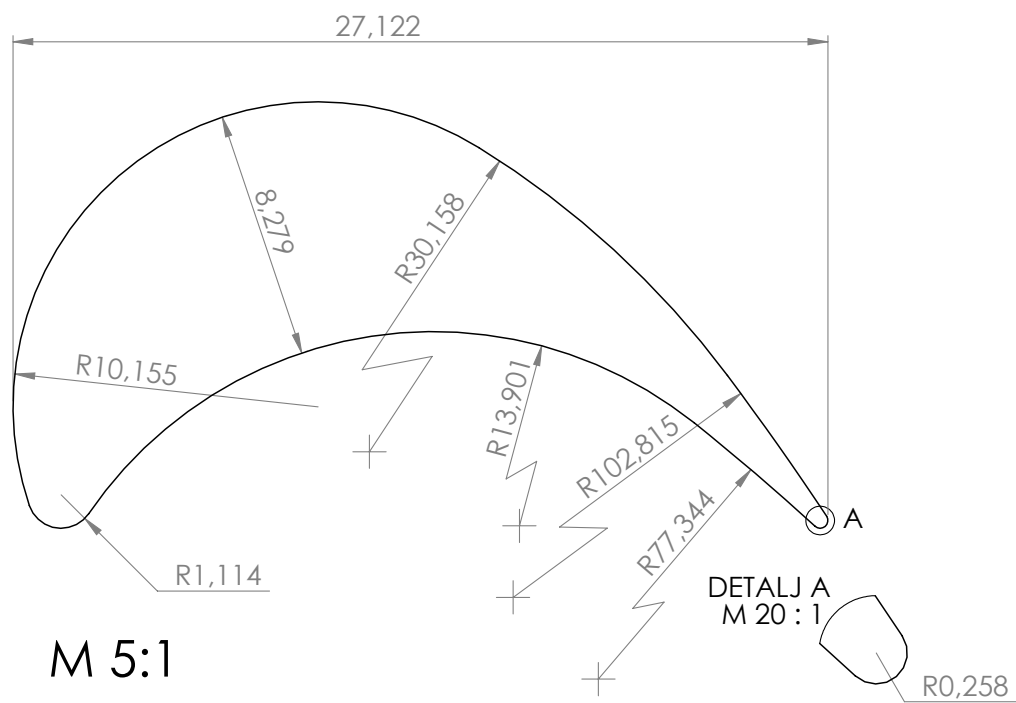
duljina lopatice: 12.5 mm

debljina diska: 50.0 mm

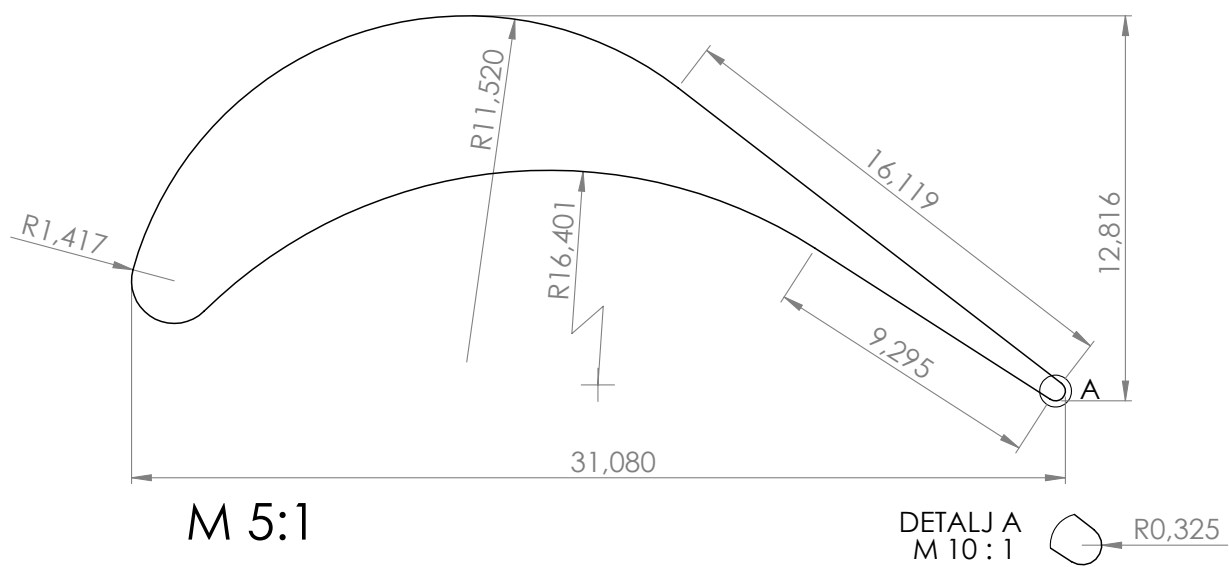
temperatura: 349.00°C

brzina zvuka:  $\sqrt{\kappa RT} \approx 500$  m/s

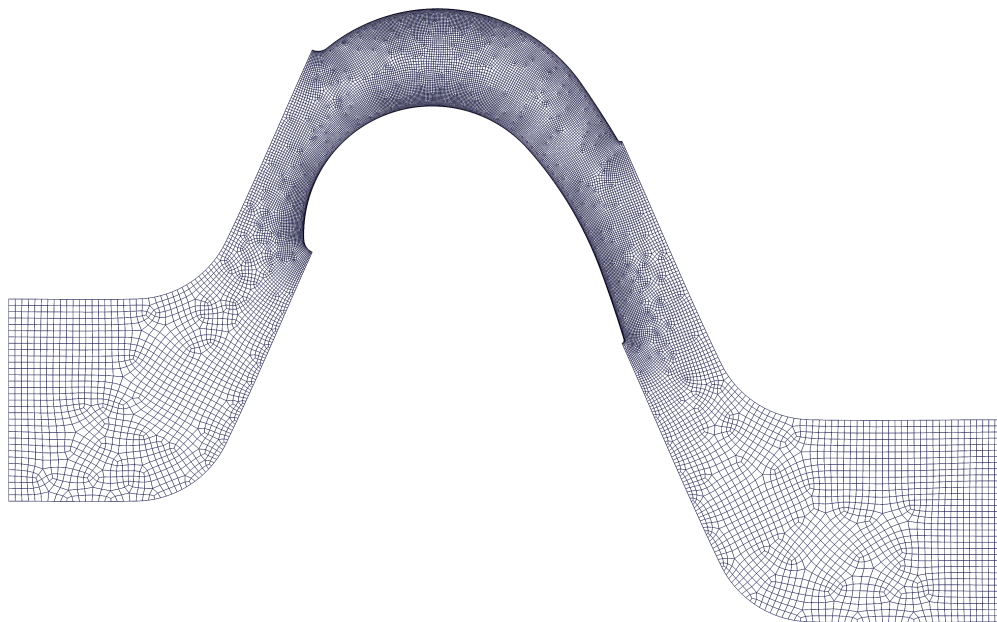
Za drugi profil nema detalja. Vrijednosti su zadane u bezdimenzijskim veličinama, no u svrhu proračuna je skaliran na približnu veličinu prvog profila.



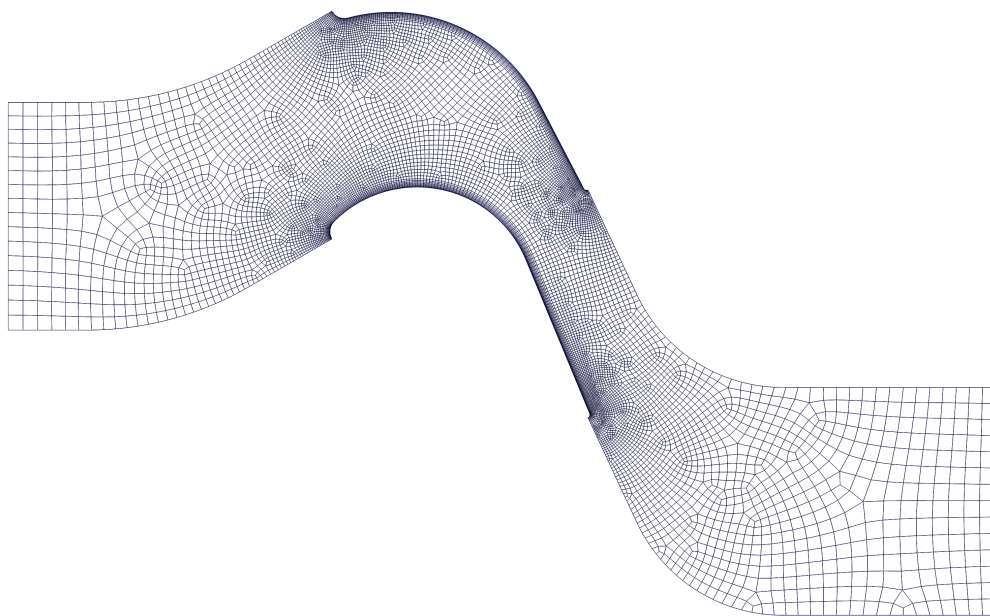
Slika 1: Geometrija 1



Slika 2: Geometrija 2



Slika 3: Mreža lopatice konstruirane isključivo pomoću kružnih lukova sa 26449 konačna volumena.



Slika 4: Mreža lopatice s kružnim lukovima i pravcima sa 11147 konačna volumena.



## 4 Značajke strujanja u kanalu rešetke

U stvarnosti se plin ponaša kao stlačivi fluid, što smo u našem slučaju zanemarili pritom svjesno unoseći grešku od 5 do 10%. U proračunu su korištene jednačbe za nestlačivo stacionarno strujanje. Strujanje je kvazi-stacionarno, pa se može zanemariti član koji opisuje promjenu čestice po vremenu i pri Machovom broju manjim od  $M = 0.3$ , pa se može pretpostaviti nestlačivo strujanje iz čeg slijedi da se promjena gustoće zanemaruje. U proračunu su korištene Navier-Stokesove jednačbe te jednačba očuvanja mase. Obzirom da smo zanemarili promjenu gustoće uvedena je supstitucija  $p = \frac{p}{\rho}$

### 4.1 Jednačbe toka fluida

Za strujanje u rešetci vrijede opći zakoni strujanja fluida a to su zakon očuvanja mase:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

i zakon očuvanja količine gibanja:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (3)$$

Pritom je zanemarena nestacionarnost izuzećem člana  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  iz jednačbe i kao što je gore rečeno, promjene gustoće te se tako dobiju sljedeće jednačbe:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

te zakon očuvanja količine gibanja:

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (5)$$

## 4.2 Turbulencija

Turbulentno strujanje je jedna od matematički najsloženijih pojava u prirodi za koju još nije otkriveno analitičko rješenje. Razlog tome leži u nelinearnosti konvektivnog člana u Navier-Stokesovim jednačbama. Iz tog razloga se do rješenja dolazi numeričkim putem.

Do turbulentnog strujanja dolazi pri visokim vrijednostima Reynoldsovog broja gdje prevladavaju sile tromosti nad viskoznim silama. Karakterizira ga izrazito nestacionarno i kaotično gibanje čestica, fluktuacije, vrtloženje.

S inženjerskog gledišta nije potrebno poznavati ponašanje strujanja u svakom trenutku, već samo prosječno ponašanje, pa se fizikalne veličine osrednjavaju po vremenu. Danas se najčešće koristi Reynoldsovo uprosječenje. Time se značajno olakšava zadaća numeričkog rješavanja tih jednačbi, jer koraci prostorne i vremenske diskretizacije više ne moraju biti toliko mali.

## 5 Modeliranje turbulencije

Najtočnije rješenje moguće je dobiti izravnom numeričkom simulacijom DNS, međutim takva bi simulacija bila iznimno skupa i neprihvatljiva. Iz tog razloga se probjegava pojednostavljenjima koja znatno smanjuju vrijeme potrebno za provedbu simulacije. Ta pojednostavljenja se mogu izvesti zanemarenjem ponašanja nekih od članova (primjerice zanemarenjem promjene tlaka), zanemarenjem pojedinih elemenata modela (konstrukcijskih detalja koji ne utječu bitno na rješenje) ili modeliranje općih pojava. Modeliranje općih pojava se izvodi tako da se rješenja koja su dobivena eksperimentalno ili numerički opišu empirijskim zakonomima. Takvo modeliranje je primjerice izvedeno kod nalaženja rješenja za ponašanje fluida u graničnom sloju (Blausius, Von Kármán).

Tako su se razvile još dvije vrste modela, a to su RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) i kompromis između prethodna dva, LES (Large Eddy Simulation).

### 5.1 Vremenski osrednjene jednačbe toka fluida (RANS)

Svaka fizikalna veličina sadrži svoj osrednjeni i svoj stohastički dio pa se može prikazati:

$$f = \bar{f} + f'$$

gdje potez označava vremenski osrednjeni dio a crtica pulsirajuću komponentu fizikalne veličine.

$$\bar{f} = (n, t) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(n, t - \tau) d\tau$$

$T_0$  mora biti odabrano tako da vrijedi  $\bar{\bar{f}} = \bar{f}$ . Ako je strujanje kvazistacionarno, što u našem slučaju je,  $T_0$  smije težiti u beskonačno. Prema tome osrednjena vrijednost pulsirajuće komponente jednaka je 0.

$$\bar{f'} = \overline{f - \bar{f}} = \bar{f} - \bar{\bar{f}} = \bar{f} - \bar{f} = 0$$

Za srednju vrijednost derivacije vrijedi

$$\frac{d\bar{f}}{dn} = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \frac{\partial f(n, t - \tau)}{\partial n} d\tau = \frac{\partial \bar{f}}{\partial n}$$

Za veličine  $f = \bar{f} + f'$  i  $g = \bar{g} + g'$  u kvazistacionarnom strujanju vrijedi:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{f} \cdot g'} &= \bar{f} \cdot \bar{g'} = 0 \\ \overline{\bar{f} \cdot g} &= \overline{\bar{f} \cdot (\bar{g} + g')} = \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{\bar{f} \cdot g'} = \bar{f} \cdot \bar{g} \\ \overline{f \cdot g} &= \overline{(\bar{f} + f') \cdot (\bar{g} + g')} = \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{f' \cdot g'} \end{aligned}$$

gdje vrijedi  $\overline{f' \cdot g'} \neq 0$

te se veličine može osrednjiti:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

i

$$\frac{\partial \bar{v}_j \bar{v}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial (\bar{p} + \frac{2}{3} \bar{k})}{\partial x_i} \quad (7)$$

$$p_{\text{eff}} = \frac{p + \frac{2}{3} \bar{k}}{\rho} \quad (8)$$

gdje je  $\bar{k} = \frac{\overline{v'_i v'_i}}{2}$  - kinetička energija turbulencije. Da se izračuna  $\bar{k}$  u osrednjenim Navier-Stokesovim jednadžbama. Tako bi Reynoldsove osnovne jednadžbe imale više nepoznanica nego jednadžbi pa sustav ne bi bio rješiv. Da se uvede nova jednadžba može se ponovo osrednjiti  $k$  te bi tako dobili 6 novih jednadžbi, no time bismo uveli još 22 dodatne nepoznanice. Ta

varijabla  $k$  je ključna u modeliranju turbulentnog strujanja i provedena su brojna istraživanja kako bi se došlo do vrijednosti koja odgovara simulaciji.

### 5.1.1 RANS modeli turbulencije

RANS modeli turbulencije se dijele obzirom na red korelacije brzina za koju se rješava transportna jednažba. Mogu biti prvog drugog i trećeg reda. Također se dijele na 3 razine: algebarski, diferencijalni modeli sa jednom jednažbom i diferencijalni modeli sa dvije jednažbe. U ovom radu se koristi  $k - \varepsilon$  model koji spada u modele s dvije dodatne transportne diferencijalne jednažbe.

## 5.2 Funkcije zida

U stvarnosti  $k$  u blizini stijenke teži 0. Taj prelazak je skokovite prirode. Javljaju se veliki gradijenti, a to zahtijeva visoku razlučljivost mreže na tom području, što znatno poskupljuje izračun. Kako bi se izbjegla potreba za mrežom visoke razlučljivosti koja bi znatno poskupila izračun. Modeliraju se vrijednosti na prvom čvoru do stijenke pomoću takozvanih funkcija zida.

Definiraju se brzina trenja:

$$v_\tau^2 = (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i \quad (9)$$

bezdimenzijska brzina:

$$v^+ = \frac{v_t}{v_\tau} \quad (10)$$

i bezdimenzijska udaljenost od stijenke:

$$y^+ = \frac{\Delta v_\tau}{\nu} \quad (11)$$

U neposrednoj blizini stijenke nalazi se laminarno područje u kojem vrijedi linearni profil brzine:

$$v^+ = y^+ \quad (12)$$

Kako se udaljavanjem od stijenke turbulentne pulsacije povećavaju linearni zakon profila brzine prelazi u logaritamski:

$$y_c^+ = \frac{1}{\kappa} \ln Ey_c^+ \quad (13)$$

	$v^+$	$k$	$\varepsilon$	$\nu_{zida}$
$y^+ < y_c^+$	$y^+$	$\frac{v_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} \left( \frac{y^+}{y_c^+} \right)^2$	$k^{\frac{3}{2}} \frac{1 + \frac{5.3\nu}{\sqrt{k}\Delta}}{\kappa c_\mu^{-\frac{3}{4}} \Delta}$	$\nu_{zida} = \nu$
$y^+ \geq y_c^+$	$\frac{1}{\kappa} \ln Ey^+$	$\frac{v_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}}$	$\frac{v_\tau^3}{\kappa \Delta}$	$\nu_{wall} = \frac{\kappa c_\mu^{1/4} k_P^{1/2} y_P}{\ln(Ey^+)}$

Tablica 1: Zakon zida.

### 5.3 O rubnim uvjetima

Rubne uvjete možemo promatrati s fizikalnog i s matematičkog gledišta.

S **matematičkog** gledišta postoje 3 vrste rubnih uvjeta:

**Dirichletovi** koji zadaju konstantne vrijednosti varijablama

**Neumannovi** koji zadaju njihov gradijent

**Robinovi** mješoviti rubni uvjeti koji se u ovom radu ne primjenjuje

Rubni se uvjeti s **fizikalnog** gledišta dijele na:

**ulazna granica;** kroz koju fluid ulazi u područje proračuna

**izlazna granica;** iz koje fluid izlazi iz područja proračuna

**nepropusna stijenka;** kroz koju nema protoka fluida. Na njoj vrijedi da je u potencijalnom strujanju normalna komponenta brzine na stijenu jednaka 0 a u viskoznom strujanju je i tangencijalna komponenta brzine jednaka 0

**ravnina simetrije;** kroz koju također nema protoka fluida, a koristi se da bi se uštedjelo na resursima, kad je strujanje simetrično kao i

**periodička granica;** koja se koristi iz istog razloga ali kada imamo ponavljajuće se rubne uvjete

## 6 $k - \varepsilon$ model

$k - \varepsilon$  model je jedan od najviše korištenih modela turbulencije i primjenjen je u većinu CFD kodova. Poput ostalih modela turbulencije pojedinosti su se razvijale tokom vremena. No najviše zasluga pripada Jonesu i Launderu (1972) za standardni  $k - \varepsilon$  model. A Launder i Sharma (1974) su poboljšali konstante modela. Značajno su doprinjeli također Davidov (1961), Harlow i Nakayama (1968), Hajnalić (1970) i drugi.

Prva transportna varijabla je  $\bar{k} = \frac{\overline{v'^2}}{2}$  koja predstavlja turbulentnu kinetičku energiju. Druga transportna varijabla u ovom slučaju je turbulentna rasipanje  $\bar{\varepsilon} = \nu \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}$ , ova varijabla određuje veličinu turbulencije.

Postoje dvije glavne formulacije  $k - \varepsilon$  modela. Prvotna ideja  $k - \varepsilon$  modela je bila poboljšanje Prandtlova modela puta miješanja sa 0 dodatnih transportnih jednažbi i pronaći alternativno rješenje algebarskom propisivanju veličina turbulentnih duljina u srednje do visoko kompleksnim strujanjima.

$k - \varepsilon$  model se pokazao upotrebljivim pri strujanjima bez graničnog sloja sa relativno malim pozitivnim gradientima tlaka.

Sadržava dvije dodatne transportne jednažbe koje predstavljaju turbulentna svojstva toka. Time u obzir uzimaju nepovratni procesi poput konvekcije i difuzije turbulentne energije.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(k u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] = P_k + \varepsilon \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] = C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (15)$$

Produkcija  $k$ :

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nu_t \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (16)$$

### 6.1 Modeliranje konstanti

U svrhu provedbe proračuna potrebno je namjestiti početne vrijednosti varijebli kako bi se osigurala konvergencija simulacije.

Konstante su Prandtlovi brojevi  $\sigma_k$  i  $\sigma_\varepsilon$  koji predstavljaju difuziju neke veličine u odnosu na difuziju brzine. To su poznate vrijednosti dobivene iz eksperimentalnih mjerenja za ovaj slučaj, dok su  $C_{1\varepsilon}$ ,  $C_{1\varepsilon}$  i  $C_\mu$  konstante modela. Njihove vrijednosti iznose:

$$C_{1\varepsilon} = 1.44; \quad C_{2\varepsilon} = 1.92; \quad C_\mu = 0.09; \quad \sigma_k = 1.0; \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (17)$$

Kinetička energija turbulencije za početne uvjete se računa:

$$k = \frac{3}{2}(UI)^2 \quad (18)$$

gdje je  $U$  brzina strujanja a  $I$  njene pulsacije, koje iznose od 2 do 3% ukupne brzine.

Rasipanje kinetičke energije turbulencije se također računa za početne uvjete.

$$\varepsilon = C_\mu \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} \quad (19)$$

Turbulentna viskoznost je definirana preko:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (20)$$

Za karakterističnu duljinu može se uzeti tetiva ili korak. Dovoljno je da se pogodi red veličine početnih uvjeta kako bi se osigurala konvergencija.

Početni uvjeti se definiraju na svim unutarnjim kontrolnim volumenima i na ulazu.

## 6.2 Rubni uvjeti za $k - \varepsilon$ model

Kako  $k - \varepsilon$  spada u modele sa dvije jednadžbe za modeliranje turbulencije pati od nekoliko ozbiljnih ograničenja:

- nemogućnost predviđanja anizotropnih Reynoldsovih tenzora naprežanja
- efekata relaksacije
- ne-lokalnih efekata zbog turbulentne difuzije
- mogu se ponašati kruto u pojedinim područjima strujanja, gdje je potrebna visoka razlučljivost mreže i mali vremenski korak (To se može nadvladati korištenjem implicitnih shema diskretizacije.)

Uz to  $k - \varepsilon$  model ne daje dobre rezultate u slučajevima velikog pozitivnog gradijenta tlaka.

$k - \varepsilon$  model se loše odražava u blizini stijenke, gdje je Reynoldsov broj mali i prevladavaju viskozni efekti. Da bi se izbjegla potreba za povećanom razlučljivošću zbog velikih iznosa gradijenata na stijenu se primjenjuju funkcije zida koje opisuju ponašanje fluida uz stijenu.

Na ulazu u rešetku postavljamo nulte Neumannove uvjete na tlak  $p$ , dok za brzinu  $v_i$ , kinetičku energiju turbulencije  $k$ , i rasipanje turbulentne energije  $\varepsilon_i$  vrijede Dirichletovi rubni uvjeti.

Na izlazu iz rešetke može se zadati proizvoljna fiksna vrijednost tlaka  $p$  (na primjer 0), jer nam je važna samo razlika tlakova na ulazu i izlazu a ne vrijednost apsolutnog tlaka. Za  $v_i$ ,  $k$  i  $\varepsilon$  zadaju se Neumannovi uvjeti.

Na samoj stijenci osim nepromočivosti zida vrijedi i Prandtlova postavda pa su normalna i tangencijalna komponenta brzine na stijenku jednake nuli.

## 7 Adjungirane jednadžbe modela turbulencije

Postoje dva pristupa u izvođenju adjungiranih jednadžbi, kontinuirani i diskretni. Razlika između njih je u tome što se kod kontinuiranog adjungirane jednadžbe izvode iz analitičke formulacije osnovnih jednadžbi toka fluida a kod diskretnog iz diskretne formulacije. O prednostima i nedostacima tih dvaju pristupa još se uvijek vode rasprave.

Provođenjem analize želimo dobiti prikupiti informacije o osjetljivosti veličine, u odnosu na koju se želi optimirati, na pomak površine lopatice, drugim riječima, u kojem smjeru i kojim intenzitetom bi trebalo pomaknuti površinu razmatranog oblika u svrhu postizanja cilja optimizacije.

Kao ograničenje na veličinu koju se želi optimirati (na cilj optimizacije) se postavlja sustav jednadžbi toka fluida.

Cilj optimizacije (smanjiti ukupni pad zaustavnog tlaka):

$$J = \int_{S_i}^{S_u} \left( p - \frac{1}{2} v_i^2 \right) v_k n_k dS \quad (21)$$

Adjungirani sustav jednadžbi izvodimo tako da vladajuće jednadžbe raspišemo u obliku reziduala koji moraju biti jednaki nekoj konstanti, koje u jednadžbama nema, odnosno jednaka je 0. Ti reziduali predstavljaju ograničenja na rješenje koje želimo dobiti..



$$R^p = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (22)$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{\text{eff}}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0 \quad (23)$$

$$R^k = v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - P_k + \varepsilon = 0 \quad (24)$$

$$R^\varepsilon = v_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P_k + C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} = 0 \quad (25)$$

$$L = J + \int_{\Omega} (u_i R_i^v + q R^p + k_a R^k + \varepsilon_a R^\varepsilon) d\Omega \quad (26)$$

Lako se mogu raspoznati ograničenja i lagrangeovi multiplikatori koji se nalaze u jednadžbi u vidu adjungiranih veličina (brzne  $u_i$ , tlaka  $q$ , kinetičke energije turbulencije  $k_a$  i rasipanja kinetičke energije turbulencije  $\varepsilon_a$ ). Te veličine nazivamo po osnovnim veličinama, no one drže vezu s njima jedino po mjernim jedinicama. One nam zapravo jako malo govore. Koriste se u svrhu procjene ispravnog rada programa i izvora greške.

Riješenje nalazimo tako da deriviramo "Lagrangian" po geometriji ("design variable"  $b_m$ ).

$$\frac{\delta L}{\delta b_m} = \frac{\delta J}{\delta b_m} + \int_{\Omega} \left( u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta b_m} + q \frac{\delta R^p}{\delta b_m} + k_a \frac{\delta R^k}{\delta b_m} + \varepsilon_a \frac{\delta R^\varepsilon}{\delta b_m} \right) d\Omega + \int_{\Omega} (u_i R_i^v + q R^p + k_a R^k + \varepsilon_a R^\varepsilon) \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} \quad (27)$$

Pošto su vrijednosti dvaju integrala jednake 0, izračun  $\frac{\delta L}{\delta b_m}$  je ekvivalentan izračunu  $\frac{\delta J}{\delta b_m}$ .

Treba još napomenuti da adjungirane jednadžbe djeluju obrnuto od osnovnih te zbog toga u sustav unose nestabilnost. One znatno poslože izračunavanje, što bi u drugim okolnostima usporilo tijekom proračuna, no to se ne dešava. Razlog tome je što se iz njih mogu dobiti vrijednosti pomoću kojih se konvergencija rezultata ubrza.

## 7.1 Rubni uvjeti za adjungirane varijable

Za adjungiranu brzinu  $u_i$  na ulazu zadaju se Dirichletovi rubni uvjeti, a za adjungirani tlak  $q$  najbolje je zadati nulte Neumannove uvjete, iako se mogu zadati i bilo koje druge.

Od adjungiranih veličina kinetička energija turbulencije  $k_a$ , rasipanje kinetičke energije turbulencije  $\varepsilon_a$  i normalna komponenta adjungirane brzine  $u_i n_i$  moraju biti nulirane.

## 7.2 Adjungirane funkcije zida

$$c_v = \begin{cases} \frac{1}{\kappa} \ln Ey^+; & y^+ \geq y_c^+ \\ \frac{2\nu_\tau \Delta}{\nu}; & y^+ < y_c^+ \end{cases} \quad (28)$$

$$u_\tau^2 = (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i \quad (29)$$

$$u_\tau^2 = \frac{1}{c_v} \left[ 2u_k t_k v_\tau - \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) \frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j \frac{\delta k}{\delta v_\tau} - \left( \nu + \frac{\nu_t}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j \frac{\delta \varepsilon}{\delta v_\tau} \right] \quad (30)$$

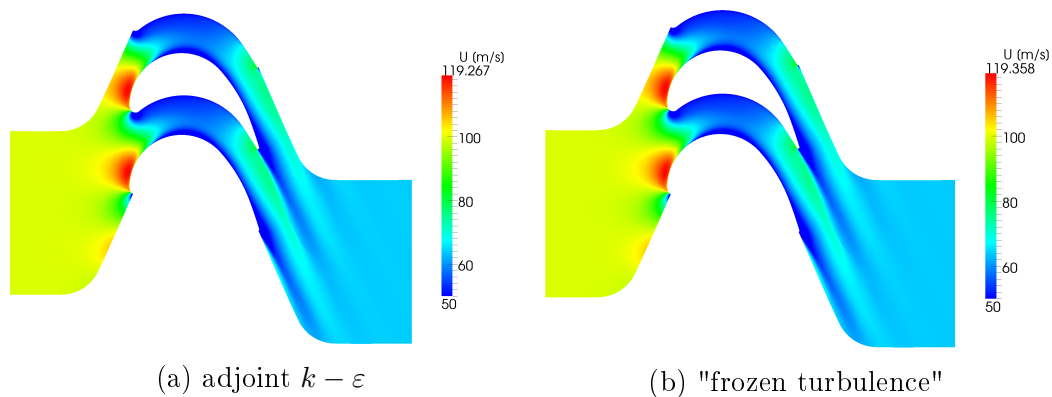
Ova se jednadžba koristi za računanje adjungiranih viskoznih protoka u blizini stijenke.

## 7.3 Adjungirani $k - \varepsilon$ i "frozen turbulence"

Provedena je usporedba dvaju adjungiranih modela turbulencije, a to su adjungirani  $k - \varepsilon$  i "frozen turbulence". Razlikuju se po tome što se u modelu "frozen turbulence" zamrzne računanje adjungiranih veličina  $\frac{\partial k_a}{\partial x_j} n_j$  i  $\frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x_j} n_j$  tako da se proračun osjetljivosti ne temelji na njima. O usporedbi učinkovitosti tih dvaju modela još se vode rasprave.

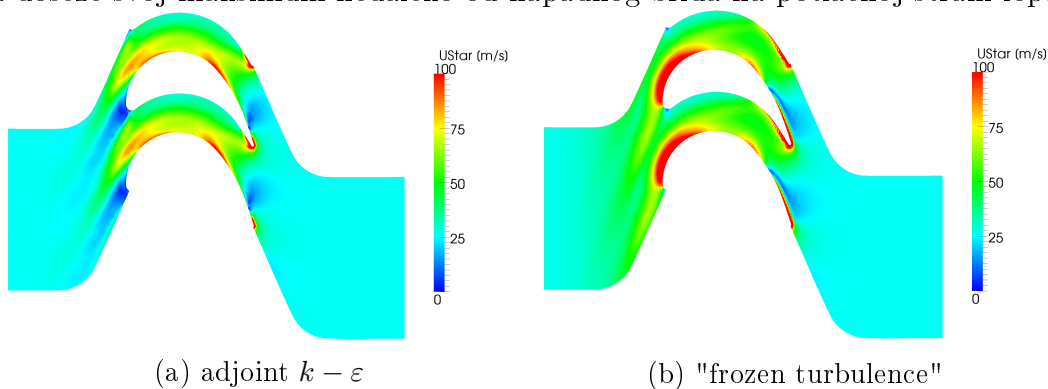
## 8 Prikaz rezultata

### 8.1 Geometrija 1



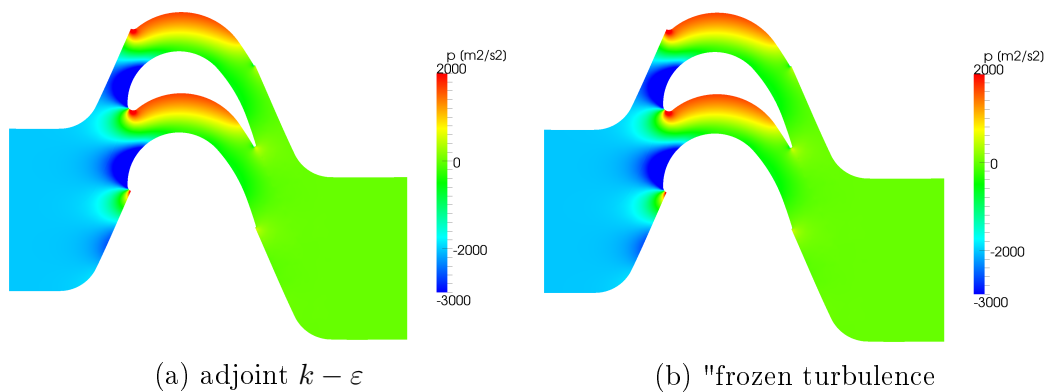
Slika 5: Brzina.

Brzina je na ulazu veća u odnosu na izlaz zbog toga što je ulazni kut struje veći od izlaznog. Brzina doseže svoj maksimum nedaleko od napadnog brida na potlačnoj strani lopatice.



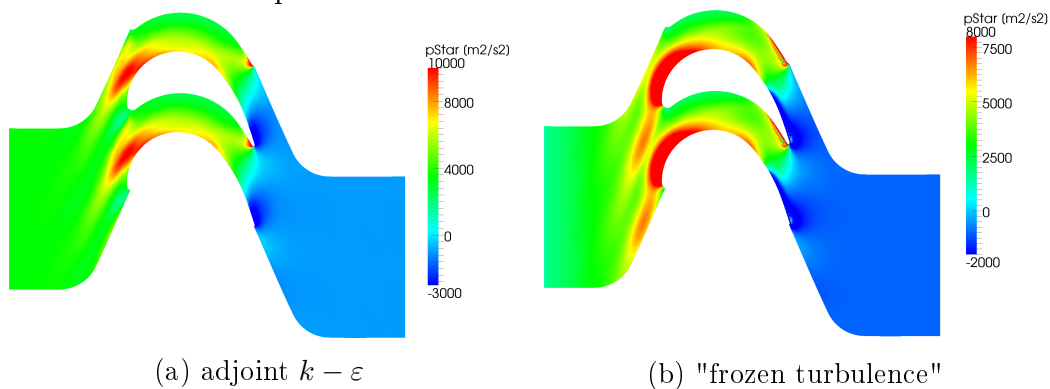
Slika 6: Adjungirana brzina.

Iz adjungirane brzine se ne da iščitati ništa što bi nam dalo neposrednu informaciju u strujanju, to je varijabla adjungiranih jednažbi.



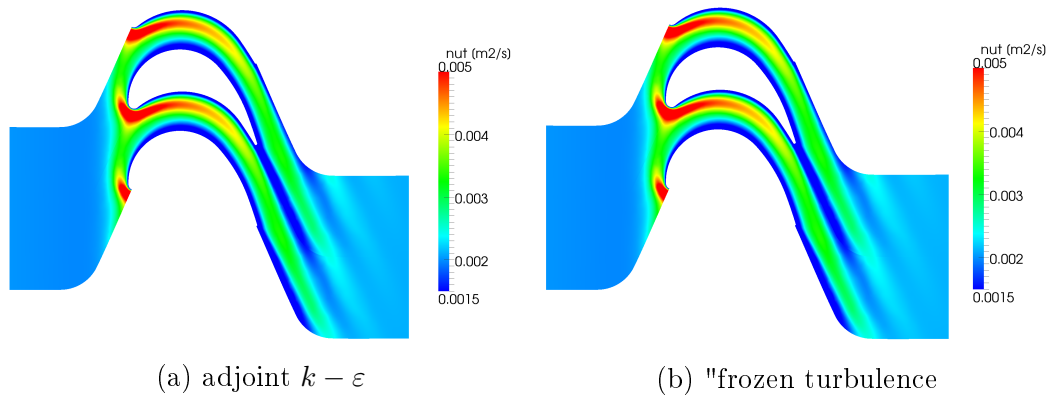
Slika 7: Tlak

Vidljivo je da se raspodjela tlaka poklapa s raspodjelom brzine i doseže minimum gdje brzina doseže svoj maksimum, a na ulazu je tlak niži nego na izlazu zbog gore ranije spomenutih ulaznih i izlaznih kuteva.



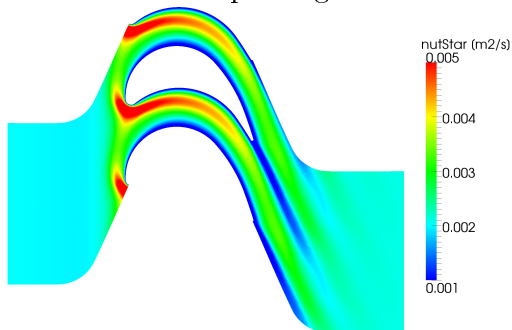
Slika 8: Adjungirani tlak.

Kao i kod adjungirane brzine ni tlak nam ne daje neposrednu informaciju o strujanju, iz adjungiranih se varijebli može jedino zaključiti o pogrešci i njenom izvoru.



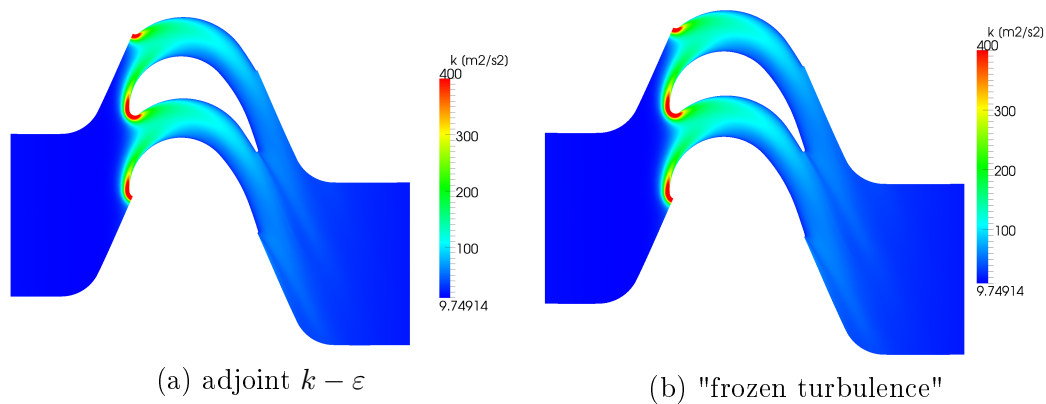
Slika 9: Turbulentna viskoznost.

Turbulentna viskoznost predstavlja turbulentna svojstva fluida, predstavlja ekvivalentnu viskoznost za naprezanja do kojih dolazi na tom mjestu. U ovom slučaju se najveća turbulentna viskoznost nalazi oko napadnog brida i širi se u pretlačnu zonu.



(a) Adjungirana turbulentna viskoznost.

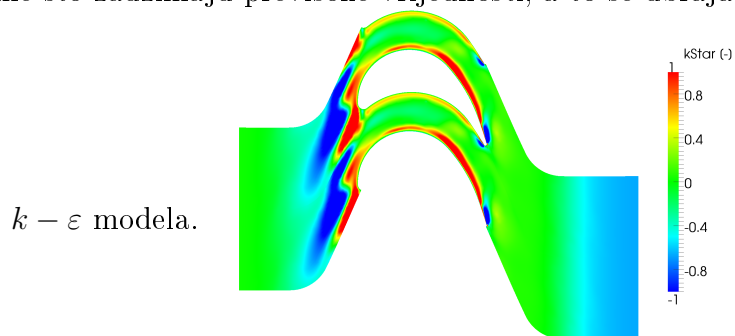
Adjungirana turbulentna viskoznost je kvalitativno slična sa turbulentnom viskoznosti.



Slika 11: Kinetička energija turbulencije.

Turbulencije su najveće na napadnom bridu, što odgovara eksperimentalnim ispitivanjima.

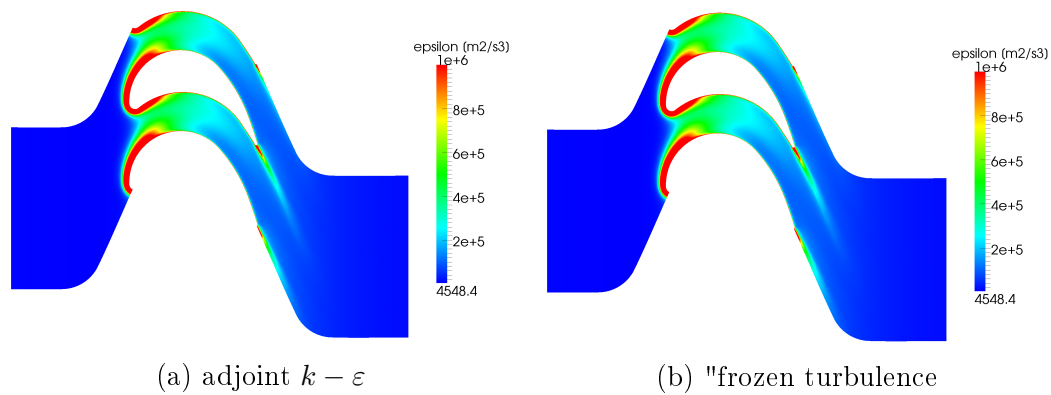
Problem je u tome što zauzimaju previsoke vrijednosti, a to se ubraja među nedostatke



(a) Adjungirana kinetička energija turbulencije.

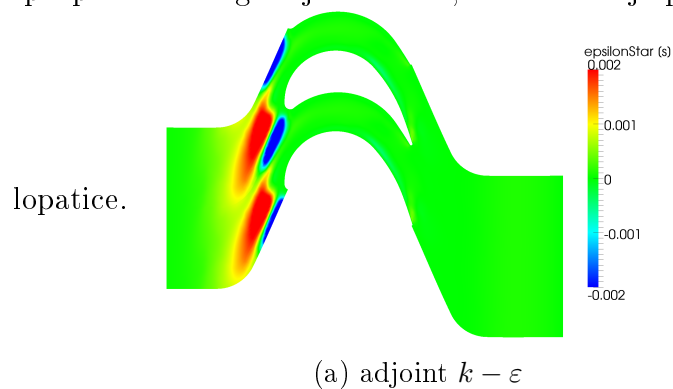
Slika 12: Adjungirana kinetička energija turbulencije.

Vrijednosti kinetičke energije turbulencije najbolje se prikazuju u rasponu skale od 1 do -1.



Slika 13: Rasipanje kinetičke energije turbulencije.

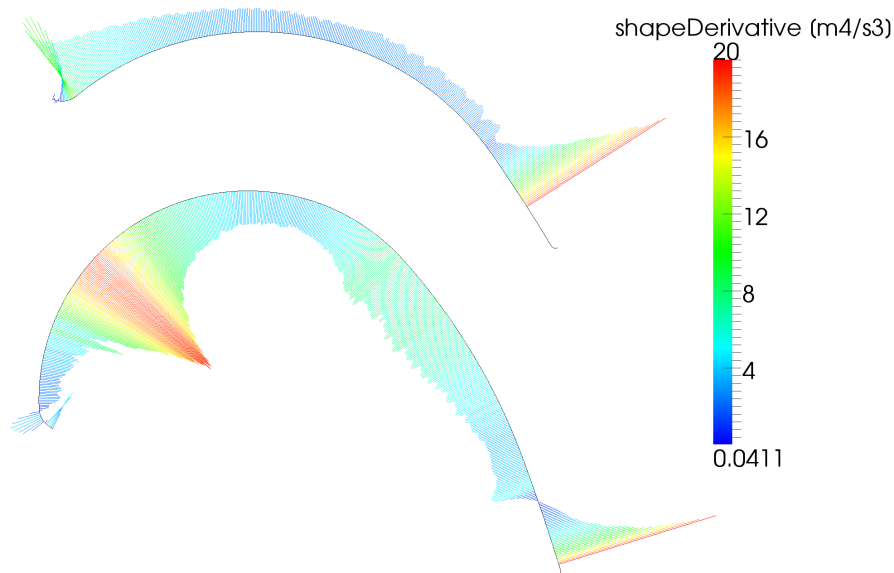
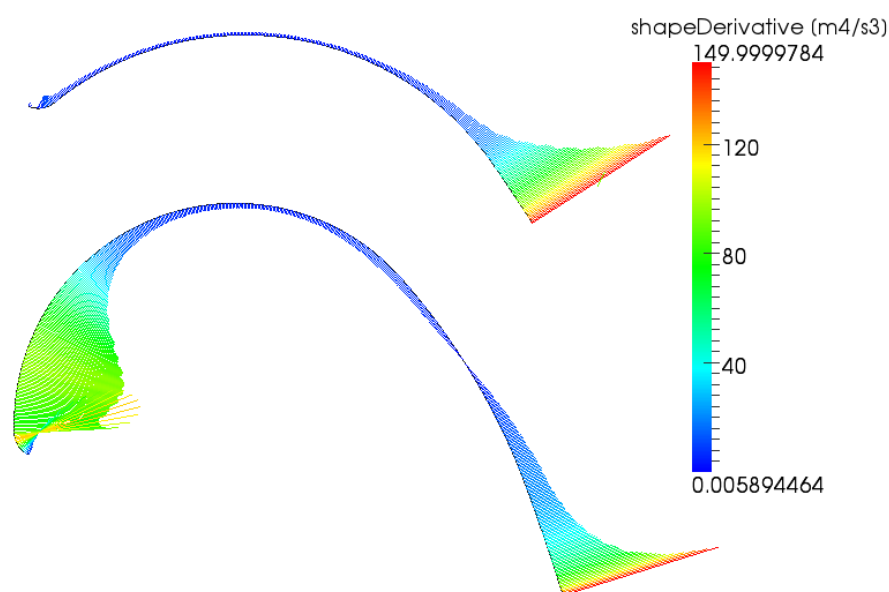
Zbog gore spomenutih previsokih vrijednosti turbulencije, rasipanje kinetičke energije turbulencije je visoko napadnom bridu, što ne odgovara stvarnosti jer se energija najintenzivnije rasipa pri pozitivnom gradijentu tlaka, a to se odvija prema izlaznom bridu



Slika 14: Adjungirano rasipanje kinetičke energije turbulencije.

Adjungirani  $k - \varepsilon$  model puno je nestabilniji od "frozen turbulence" modela. O tome govore nagli skokovi u osjetljivosti koji neprestano bježe oko profila kako se povećava broj iteracija.



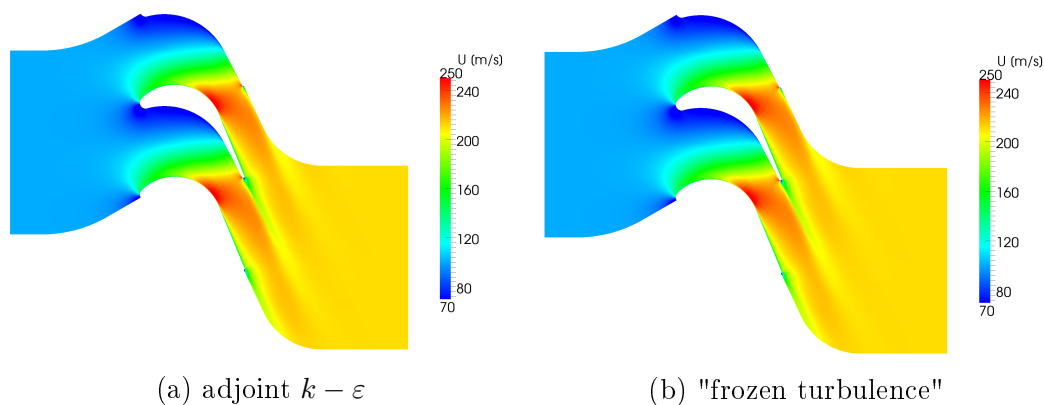
(a) adjoint  $k - \varepsilon$ 

(b) "frozen turbulence"

Slika 15: Raspodjela osjetljivosti.

Raspodjela osjetljivosti za "frozen turbulence" model je izraženija od raspodjele osjetljivosti  $k - \varepsilon$  modela. Vrh doseže pri čak pet puta višim vrijednostima od modela  $k - \varepsilon$ . Po vrhovima gradijenata javlja se njihanje vrijednosti u obliku valova. Do tog dolazi najvjerojatnije zbog slabije razlučljivosti mreže. Najveće vrijednosti osjetljivosti se kod oba modela javljaju na pretlačnoj strani lopatice, tik uz područje najveće brzine.

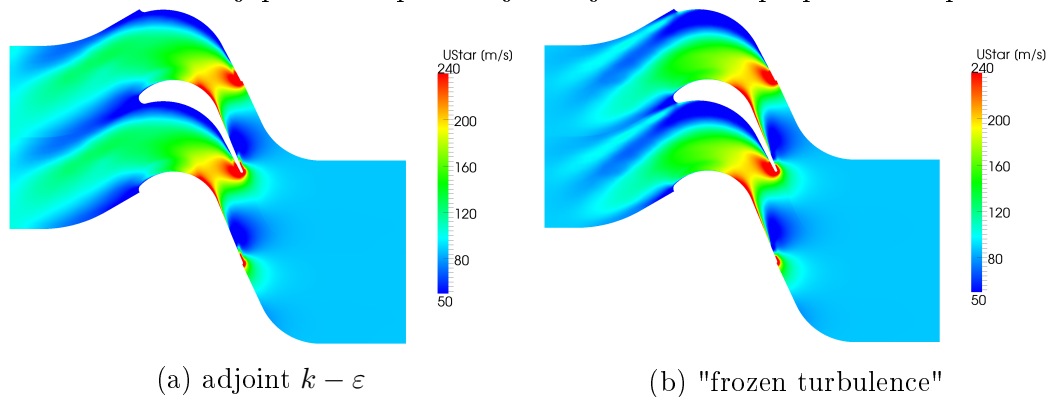
## 8.2 Geometrija 2



Slika 16: Brzina.

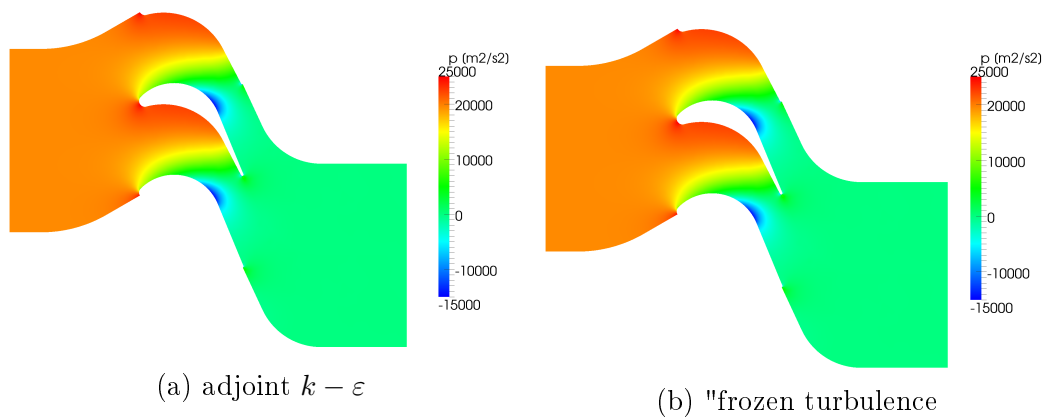
Suprotno od prethodnog primjera, u ovom je slučaju ulazni kut blaži od izlaznog, što se također manifestira u raspodjeli brzina. Uz istu ulaznu brzinu, brzina na izlazu dostiže puno veće vrijednosti, čak više od dvostruko. Pretpostavka o nestlačivosti bi u ovom slučaju možda bila neopravdana, pogotovo kad bi temperatura bila ista kao u prethodnom slučaju.

Na slikama se lijepo vidi usporavanje struje na izlazu po poledini lopatice.



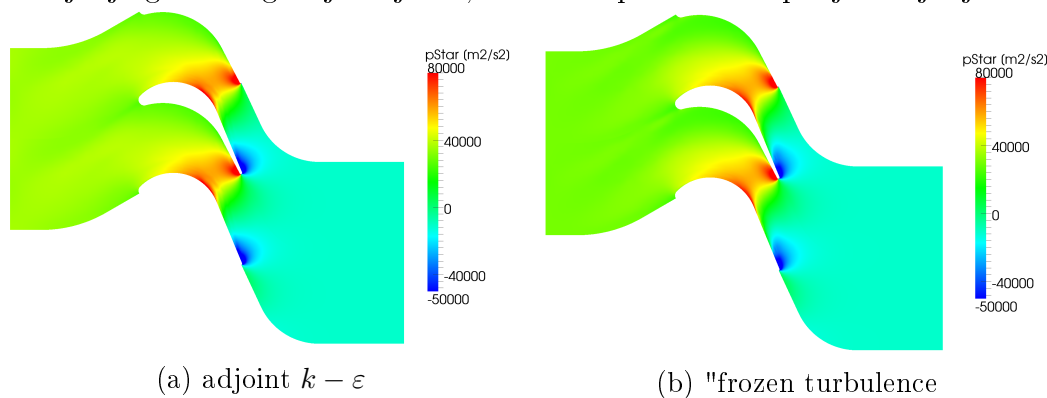
Slika 17: Adjungirana brzina.

Adjungirana brzina doseže najveće vrijednosti u blizini izlaznog brida.



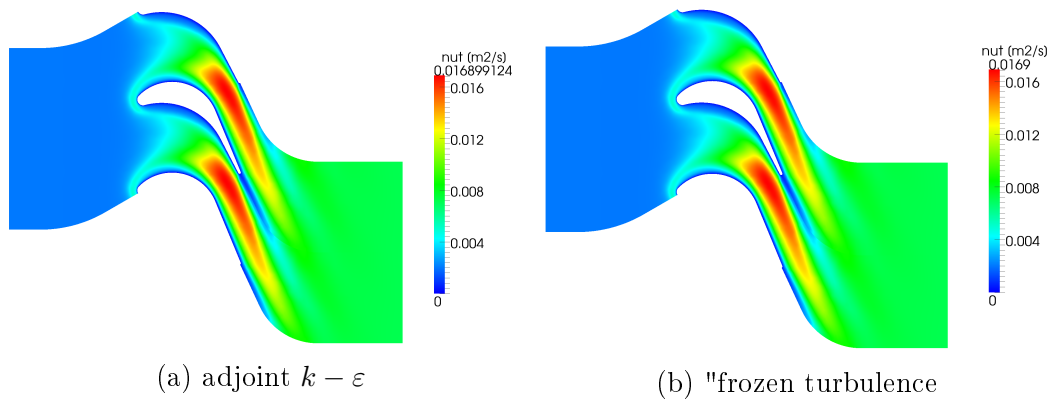
Slika 18: Tlak

Kao i kod prethodnog slučaja, raspodjela tlaka odgovara raspodjeli brzina. Na slikama se može vidjeti područje minimalnog tlaka, koje se nalazi na mjestu gdje kružni luk prelazi u pravac. Nakon minimuma tlak ima pozitivan gradijent. Na tom je mjestu mogućnost odvajanja graničnog sloja najveća, a što će i pokazati raspodjela osjetljivosti.



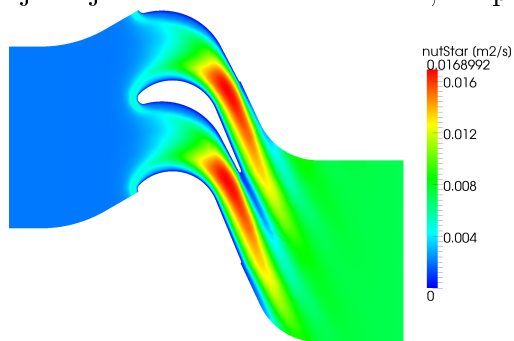
Slika 19: Adjungirani tlak.

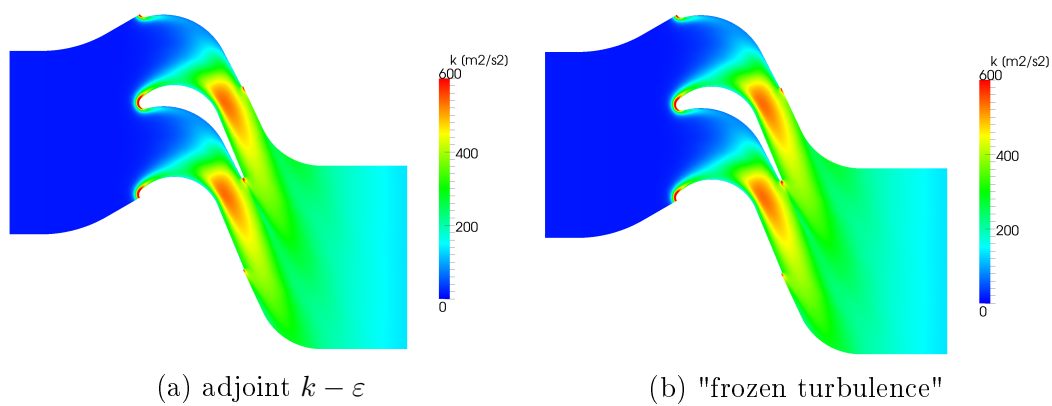
Adjungirani tlak ima svoj maksimum na najužem presjeku kanala, a minimum na izlaznom bridu.



Slika 20: Turbulentna viskoznost.

Turbulentna viskoznost je najveća na izlazu iz rešetka, na području najveće brzine.

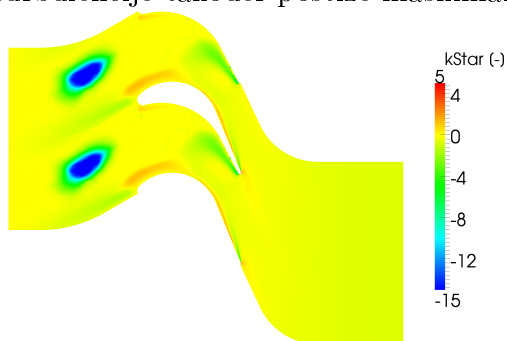


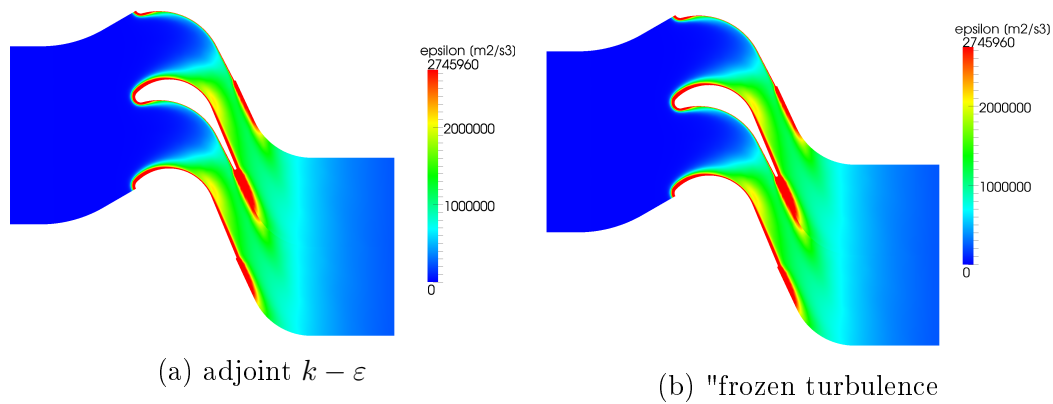


Slika 22: Kinetička energija turbulencije.

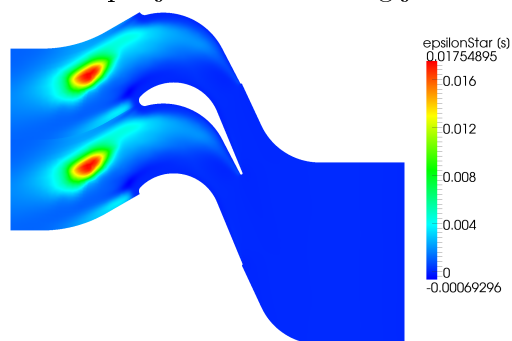
Razumljivo je da kinetička energija turbulencije također postiže maskimalnu vrijednost na

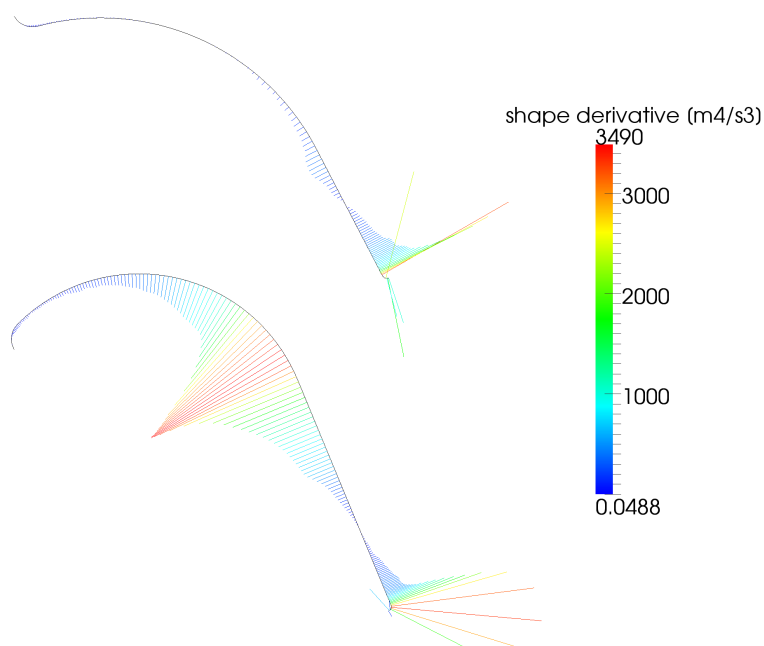
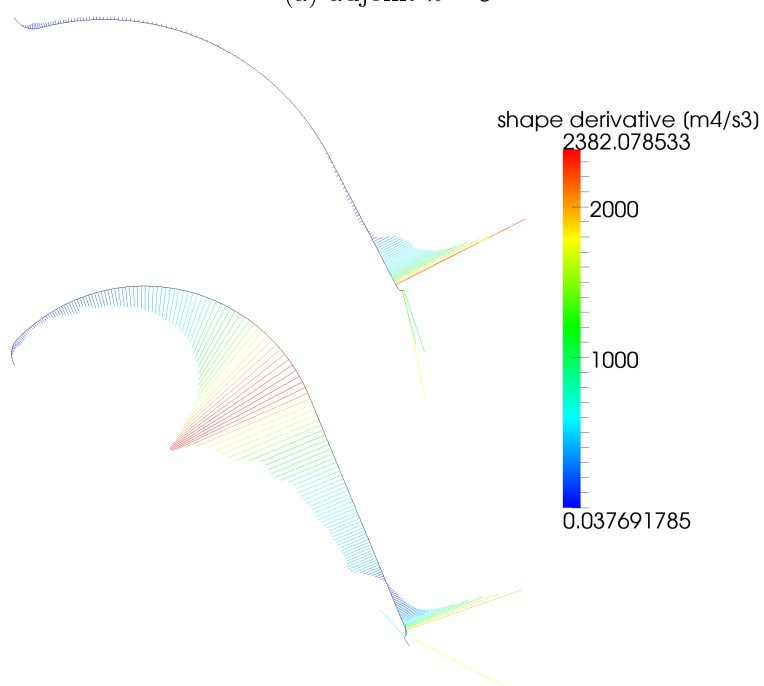
najužem presjeku.





Slika 24: Rasipanje kinetičke energije turbulencije.



(a) adjoint  $k - \varepsilon$ 

(b) "frozen turbulence"

Slika 26: Raspodjela osjetljivosti

Iz raspodjele osjetljivosti jasno je vidljivo da bi u sljedećem koraku preoblikovanja trebalo pomaknuti površinu spoja kružnog luka i pravca, odnosno izgladiti taj dio. Ovaj slučaj je različit od prethodnog po tome što  $k - \varepsilon$  model postiže veće maksimalne vrijednosti od "frozen turbulence" modela.



## 9 Zaključak

U svrhu optimizacije koriste se determinističke i gradijentne metode. Pomoću gradijentnih metoda brže se nalazi lokalni optimum te se tako pojeftinjuje proces optimizacije. Prvi korak optimizacije pomoću gradijenata je izračun osjetljivosti veličine koju želimo optimirati na pomak površine odabrane geometrije. Kao odabrana gradijentna metoda koriste se adjungirani modeli turbulencije koji se izvode pomoću Lagrangeovih multiplikatora te se pomoću njih dobije raspodjela osjetljivosti po površini lopatice na izabranu veličinu koju želimo optimirati (smanjiti ukupni pad zaustavnog tlaka u rešetci). Raspodjela osjetljivosti kvalitativno opisuje izračunati traženi pomak površine u svrhu približavanja cilju optimizacije. Za izračun raspodjele korištena su dva adjungirana modela turbulencije: adjungirani  $k - \varepsilon$  i "frozen turbulence" model. Na temelju izračuna za prvu geometriju moglo bi se donijeti zaključak da je adjungirani  $k - \varepsilon$  model nešto manje pouzdan i sporiji od modela "frozen turbulence", te bi to bila tema za proučiti.

## Literatura

- [1] R. A. Van Den Braembussche, *Turbomachinery component design by means of CFD*, Turbomachinery and Propulsion Department – von Karman Institute, Waterloose steenweg 72, B-1640 Sint-Genesius-Rode, Belgium, Jul 2001
- [2] M. B. Giles, *Some thoughts on exploiting CFD for turbomachinery design*, Oxford University Computing Laboratory Wolfson Building, Parks Road, Oxford OX1 3QD, UK, 1998
- [3] J. A. Snyman, *Practical Mathematical Optimization*, Springer, 1984.
- [4] A. Auger, *Numerical Optimization: Introduction and gradient-based methods*, Master 2 Recherche LRI Apprentissage Statistique et Optimisation, Inria Saclay-Ile-de-France, Nov 2011
- [5] H. Jasak, *Turbulence Modelling for CFD*, NUMAP-FOAM Summer School, Zagreb 2-15 Sep 2009
- [6] *podloge iz predavanja za Mehaniku Fluida II - što valja zapamtiti*
- [7] I. Džijan, *podloge iz predavanja za Računalnu dinamiku fluida*
- [8] A. S. Zymaris, D. I. Papadimitrou, K. C. Giannakoglou, C. Othmer *Adjoint wall functionas: A new concept for use in aerodynamic shape optimization*, Journal of Computational Physics, 2010.
- [9] C. Othmer *A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows*, Copyright q 2008 John Wiley & Sons, Ltd.
- [10] V. Vukčević, *Diplomski rad: Primjena računalne dinamike fluida u analizi gibanja plovnih objekata*,
- [11] M. Popovac, *Implementation of the continuous adjoint shape optimization method based on the Navier-Stokes equations with high-Re  $k - \epsilon$  turbulence model*,
- [12] E. Helgason, *Development of Shape Optimization for Internal Flows*, Department of Applied Mechanics, CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, Gothenburg, Sweden 2013
- [13] [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

[14] [www.cfd-online.com](http://www.cfd-online.com)

[15] [www.openfoam.org](http://www.openfoam.org)